

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESTE COSMOLÓGICO COM A IDADE DE GALÁXIAS VELHAS

Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Física com Habilitação em Astronomia. *Área de Concentração:* Cosmologia, Relatividade e Astrofísica.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda

Aluno: Jaelsson Silva Lima

Matrícula: 201120001932

E-mail: jaelsson.slima@gmail.com

SÃO CRISTÓVÃO-SE
Fevereiro de 2018

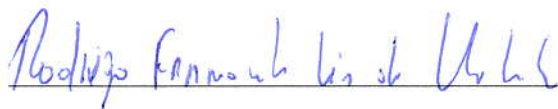
JAEISSON SILVA LIMA

TESTE COSMOLÓGICO COM A IDADE DE GALÁXIAS VELHAS

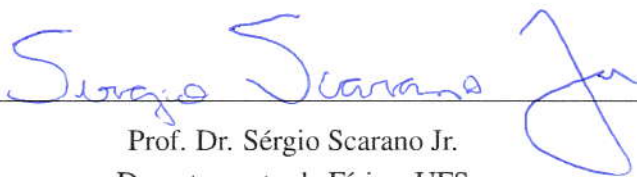
Monografia apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Física com Habilitação em Astronomia. *Área de Concentração:* Cosmologia, Relatividade e Astrofísica.

Aprovada em 21 / 02 / 2018 .

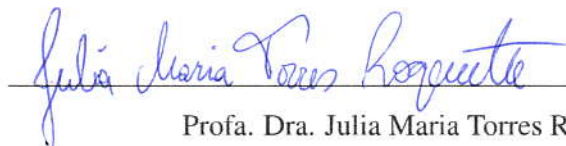
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rodrigo Fernandes Lira de Holanda - Orientador
Departamento de Física, UFS



Prof. Dr. Sérgio Scarano Jr.
Departamento de Física, UFS



Profa. Dra. Julia Maria Torres Roquete
Departamento de Física, UFS

SÃO CRISTÓVÃO-SE

Fevereiro de 2018

TESTE COSMOLÓGICO COM A IDADE DE GALÁXIAS VELHAS

JAEISSON SILVA LIMA¹

¹ Universidade Federal de Sergipe, CCET, Departamento de Física, Av. Marechal Rondon S/N, 49100-000, São Cristóvão, SE, Brasil
E-mail: jaelsson.slima@gmail.com

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso, fizemos uma revisão da literatura a respeito da cosmologia relativística, bem como da *Teoria do Big Bang*, apresentando e discutindo brevemente os pilares observacionais que a sustenta. Como nesta “era da precisão” em cosmologia, um dos objetivos é determinar os principais parâmetros cosmológicos sem ambiguidades, discutimos como limites sobre estes podem ser obtidos de amostras de idades de galáxias velhas em altos *redshifts* ($0,11 \leq z \leq 1,84$), no chamado teste da idade. É de extrema importância comparar vínculos advindos de diferentes quantidades observáveis, não só para garantir a precisão, mas como também testar a acurácia dos valores encontrados. Como resultado básico, nós concluímos que os vínculos advindos deste teste sobre os parâmetros que caracterizam a matéria e energia escura, embora ainda pouco restritivos, estão em total acordo com testes independentes, que advogam uma dominância da componente de energia escura, que acelera a expansão do espaço-tempo.

Palavras chaves: altos *redshifts*, idades e parâmetros cosmológicos.

1 Introdução

A palavra *cosmologia* vem da origem grega da palavra “Kosmos”, que significa harmonia ou ordem. Cosmologia é o ramo da astronomia¹ que estuda a evolução e estrutura do Universo como um todo [1, 2]. Na astronomia, uma galáxia é um sistema gravitacionalmente ligado que consiste de estrelas, nebulosas, gás, poeira, etc. [3, cap. 1]. As galáxias são classificadas em três tipos básicos²: elípticas, espirais e irregulares. As galáxias elípticas têm um formato elipsoidal ou esferoidal e são caracterizadas pelo perfil de brilho superficial suave³, possuem pouco gás e poeira, além de ter características fotométricas de cor vermelha, que caracteriza uma predominância de população estelar antiga, ou seja, existe pouca (ou nenhuma) formação estelar [4, cap. 4], [5, cap. 8]. As galáxias espirais⁴ têm uma forma espiralada, possuem discos

finos, braços espirais, halo e bojo. O conteúdo estelar presente geralmente inclui uma população de estrelas jovens (no disco) e velhas (no bojo e halo) [4, cap. 9], [6, cap. 26]. As galáxias irregulares não têm uma forma bem definida e sua população estelar é semelhante aos das galáxias espirais [6]. Para saber o quão jovem ou velha é uma galáxia, a chave é conhecer a classe de população estelar existente⁵, a taxa de metalicidade⁶ contida nela, entre outras propriedades [6, 7, 8, 9, 10]. O estudo desse tipo de objeto tem um papel importante para a cosmologia moderna⁷. A cosmologia relativística, surge quando, em 1917, *Albert Einstein* apresentou o primeiro modelo cosmológico [11], baseado na Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por ele em 1915. Tratava-se de um modelo de Universo esférico e estático, com volume finito e sem bordas, obedecendo o *Princípio Cosmológico* (PC) (visto na Subseção 2.1) [7]. Inicialmente, Eins-

¹ Astronomia é o ramo da ciência que estuda os corpos celestes existente no Universo (planetas, asteroides, estrelas, galáxias, etc.).

² Alguns autores denotam mais um outro tipo além destes, as galáxias lenticulares, que na realidade seria um intermediário entre as galáxias espirais e elípticas.

³ O brilho cai de forma exponencial do centro com relação as bordas, refletindo uma concentração de brilho no centro da galáxia, típico de distribuição elipsoidal (esferoidal).

⁴ Nossa Galáxia é deste tipo.

⁵ Conhecendo a população estelar é possível estimar a idade correspondente, sendo esta o limite mínimo de idade para a galáxia.

⁶ A metalicidade é decrescente com a idade das estrelas, quanto mais jovens forem as estrelas mais são ricas em metais, já que a região de formação foram contaminadas por gerações estelares anteriores.

⁷ A cosmologia moderna é considerada todo o período desde o surgimento da cosmologia relativística até os tempos atuais.

tein colocou um termo cosmológico (a constante cosmológica) em seu modelo, para contrapor a gravidade e obter um Universo que fosse estático [7, p. 401], como era acreditado na época. No mesmo período, *Willem de Sitter* propôs um modelo que iria de encontro ao proposto por Einstein [12, 13]. O modelo consistia, em um espaço plano, sem matéria e num estado estacionário [1, 14]. Enquanto que o Universo de Einstein era contido de matéria, mas sem movimento, o Universo de de Sitter continha movimento e não tinha matéria. Esses foram os primeiros modelos cosmológicos de Universo apresentados na cosmologia moderna [13].

Posteriormente, o matemático e cosmólogo soviético *Alexander Friedmann* encontrou soluções de Universo em expansão, usando as equações da TRG, sem a necessidade de introduzir o termo cosmológico em seus modelos [14], isto no início da década de 1920. Foram encontradas soluções de dinâmicas do Universo, com curvatura positiva, em 1922 [15] e com curvatura negativa, em 1924 [16]. Ainda, de forma independente, *Abbé G. Lemaître*, em 1927 [17], *H. P. Robertson*, em 1935 [18] e *A. G. Walker*, em 1937 [19], descobriram as mesmas soluções. Com as observações feitas por *Edwin Hubble*, em 1929 [20, 21], da expansão do Universo, a ideia de Universo estático de Einstein ficou desacreditada, sendo logo abandonada. Em 1932, Einstein em parceria com de Sitter trabalharam em um modelo de Universo expansionista com a constante cosmológica nula, geometria espacial plana (pseudo-euclidiana) e com matéria, conhecido como modelo *Einstein-de Sitter* [14]. Este modelo se tornou o padrão até meados de 1980, puramente por sua simplicidade, mas não por corroborações observacionais, praticamente inexistentes na época [1, 14].

Na verdade, as soluções encontradas por Friedmann e Einstein-de Sitter, dadas a partir das equações da TRG, incluem expansão eterna do Universo ou recolapso [13]. Quando a constante cosmológica é nula ($\Lambda = 0$), existem três situações. Um Universo com seção espacial plana $k = 0$, correspondendo ao modelo de Friedmann pseudo-euclidiano ou modelo *Einstein-de Sitter*, onde a densidade de matéria é igual a densidade crítica do Universo ($\rho = \rho_c$); seção espacial aberta $k = -1$, significa que ($\rho < \rho_c$) e o Universo corresponde ao modelo de Friedmann hiperbólico e expandirá eternamente; já quando, a seção espacial é fechada $k = 1$, tem-se ($\rho > \rho_c$), a expansão de qualquer região do Universo reverterá em uma contração, correspondendo ao modelo de Friedmann fechado [7, 21, 22].

A TRG foi de extrema importância para o desenvolvimento da cosmologia, pois possibilitou a existência de um Universo dinâmico, onde matéria-energia e espaço-

tempo estão completamente entrelaçados entre si. Juntamente com a descoberta da expansão do Universo por Hubble, além de outros acontecimentos do mesmo século, como o sucesso da teoria da nucleossíntese primordial e a existência da radiação cósmica de fundo, são os pilares do que chamamos de *Teoria do Big Bang (TBG)*. Brevemente, alguns destes acontecimentos mais importantes foram: A verificação, na década de 1960, que a formação dos primeiros elementos leves: Deutério (2_1H), Hélio (3_2He , 4_2He) e Lítio (6_3Li , 7_3Li), poderia acontecer nos primeiros segundos do Universo ($t \simeq 10^{-2} - 200$ segundos), quando ele ainda era quente e denso, com temperaturas maiores que o núcleo solar ($T \approx 10^{10}K$), num processo conhecido como *Nucleossíntese Primordial (NP)* [2, 23, 24]; A descoberta da radiação cósmica de fundo (*Cosmic Microwave Background - CMB*), por *A. Penzias* e *Robert W. Wilson*, em 1965 [25], de forma acidental. Uma radiação que comportava-se bem à curva de emissão de um corpo negro e de característica isotrópica e homogêneas, com temperatura de corpo negro em torno de $2,7K$. Anteriormente, em 1948, *George A. Gamov* já havia proposto a existência de uma radiação de fundo [26]. Essa radiação, foi emitida cerca de 350 mil anos após a era Planck (momento após o qual física atual pode ser aplicada, cerca de 10^{-43} s), quando o Universo já estava frio o suficiente ($T \approx 3000K$) para ocorrer o desacoplamento entre fótons primordiais e a matéria [2].

Assim como já foram mencionados anteriormente, a CMB, a TRG, a expansão do Universo, a formação dos primeiros átomos leves formam o alicerce da *Teoria do Big Bang*. Durante a década de 90 do século passado, dados observacionais foram coletados por diversos instrumentos astronômicos de última geração. Particularmente, em 1990, apareceram os primeiros resultados mais detalhados sobre a curva de corpo negro da CMB [27]. Em 1998, a partir de observações de supernovas do tipo Ia⁸ (SNe Ia), os trabalhos publicados por *A. G. Riess* [28] e *S. J. Perlmutter* [29] de forma independente, mudaram abruptamente nossa forma de pensar a dinâmica do espaço-tempo. A partir de uma análise do diagrama *Hubble-Sandage*⁹, descobre-se que o espaço-tempo se expande de forma acelerada e não desacelerada, como se pensava anteriormente. Daí, passando a vigorar um novo modelo cosmológico, com conteúdo energético dominado por uma componente de caráter gravitacional repulsivo, mais precisamente, uma forma de energia com pressão negativa, chamada de *energia escura* (Negative-Pressure Dark Energy (ω CDM)) [30, 31]. Estes resultados foram corroborados pelas análises das anisotropias da CMB por volta do ano 2000 [32, 33], sendo considerados hoje uma das maiores descobertas da astronomia do

⁸Explosões termonucleares de estrelas anãs brancas, compostas basicamente de Carbono e Oxigênio [34].

⁹Descreve o brilho observado em função do *redshift*.

final do século passado [13].

A natureza da *energia escura* sob o ponto de vista da física de partículas é o grande desafio da cosmologia atual [14]. A constante cosmológica Λ (caracterizada por parâmetros da equação de estado do tipo $p = \omega \rho c^2$, $\omega = -1$) é o candidato mais forte à energia escura, podendo ser associadas aos estados de vácuos dos campos que existem no Universo [30]. No entanto, existem outros diversos candidatos para à energia escura além da constante cosmológica, uma vez que esta apresenta alguns problemas, mais especulativos, tais como: matéria X (componente caracterizada pela equação do estado $p_x = \omega \rho_x c^2$, $-1 \leq \omega < 0$); gás de Chaplygin (com a equação de estado dada por $p = -A/\rho^\alpha$, sendo A uma constante positiva e $0 \leq \alpha \leq 1$); decaimento do vácuo (Com o próprio termo $\Lambda(t)$ decaindo com o tempo); etc. Todos esses diferentes modelos também são bem ajustados aos dados observacionais [31].

Por outro lado, outra maneira seria aceitar a ideia que algum mecanismo produz a aceleração, sem a necessidade de introduzir a energia escura. Em 1996, J. A. Lima [35] propôs um modelo de criação de matéria, sendo que a criação de partículas, em um tratamento semi-clássico da gravidade, geraria uma pressão negativa. Em 2004, Sean M. Carroll [36] mostrou que também é possível gerar aceleração, sem a necessidade de qualquer constante cosmológica, se a TRG for modificada. Em 2017, Gábor Rácz [37] propôs uma abordagem estatística não perturbativa para a “conjectura do Universo separado”¹⁰, estimando a taxa de expansão média como sendo a média dos volumes das taxas da expansão local, evitando assim qualquer cálculo de quantidades geométricas. O algoritmo proposto faz com que a taxa de expansão do Universo (do modelo padrão) diminua a uma taxa mais lenta, limitando os efeitos da energia escura. Outra possibilidade é admitir que o Universo tem outras dimensões, onde apenas a gravidade pode acessar, provocando uma aceleração em nossas 4-dimensões, etc [14].

Diante do discutido acima, limitar o valor de ω através de diferentes técnicas observacionais constitui uma importante tarefa para um melhor entendimento da natureza da energia escura [31]. Assim, a partir do embasamento da cosmologia relativística, o presente trabalho tem como objetivo apresentar e discutir limites existente sobre parâmetros cosmológicos advindos de amostras de idades de objetos¹¹ em altos *redshifts*, bem como da idade total do universo. É importante enfatizar, que este tipo de teste é independente de observações de velas e réguas padrão, largamente utilizadas nos principais tes-

tes cosmológicos.

Na Seção 2 será apresentada uma revisão da literatura da cosmologia padrão. Na Seção 3 será apresentado a teoria do *Lookback time* para altos *redshift*, além da análise estatística dos dados para obtenção de parâmetros cosmológicos de interesse. Na Seção 4 serão apresentados e discutidos os resultados obtidos por Dantas [30] e outras colaborações. Na Seção 5 serão concluídos os resultados obtidos na Seção 3 e introduzido as perspectivas futuras.

2 A Cosmologia Padrão

A Cosmologia Padrão é baseada no cenário que chamamos de *Teoria do Big Bang*. Tendo como um dos seus pilares, a formulação da TRG. Esta fundamenta os principais modelos cosmológicos da cosmologia moderna. Nesta seção apresentaremos discussões sobre o PC, Teoria da Relatividade Especial (TRE), TRG, além da métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e as equações de Friedmann, afim de fundamentar alguns parâmetros cosmológicos de interesse.

2.1 O Princípio Cosmológico

O *Princípio Cosmológico* foi introduzido por Einstein em 1917 para simplificar o problema, ainda sem qualquer justificativa observacional [4]. As observações de contagens de galáxias e radiogaláxias e da expansão isotrópica do Universo por Hubble foram as primeiras evidências observacionais [39]. A evidência mais forte apareceu com a descoberta da radiação cósmica de fundo (CMB), devido ao seu alto grau de isotropia [25, 39]. A ideia do PC é o fato de não existir um local privilegiado no Universo, ou seja, ele é o mesmo em qualquer direção e em qualquer distância, em outras palavras, o Universo é *homogêneo e isotrópico* (isso é verdade somente em grandes escalas, maiores que $150 Mpc$) [40]. As observações da anisotropias da radiação cósmica de fundo, bem como a distribuição de matéria em larga escala no Universo, corrobora bem com essa ideia [40, 41, 42].

A forma homogênea do Universo não pode ser confundida com a uniformidade. Por exemplo, no Universo local há uma probabilidade bastante elevada de encontrar galáxias próximas umas das outras em uma certa escala. A distribuição está correlacionada a uma escala de cerca de $150 Mpc$. Em escalas maiores a correlação vai diminuindo e o Universo passa a possuir uma maior homogeneidade (ver Fig. 1) [43]. A partir do PC, foi

¹⁰Esta conjectura propoe que uma região esférica simétrica em um universo isotrópico se comporta como um mini-universo com sua própria densidade de energia $\Omega = 1 + \delta$ [38].

¹¹Esses objetos são galáxias velhas em altos *redshifts* ($0,11 \leq z \leq 1,84$) observados. A partir de evidências espectroscópicas de cor no vermelho, que resulta em estrelas velhas e da comparação de dados espectrais com os modelos da evolução das populações estelares, é possível estimar idades mínimas de 3,5 bilhões para os objetos após sua formação [10, 30].

possível a construção de diversos modelos cosmológicos [32, 39, 44, 45, 46].

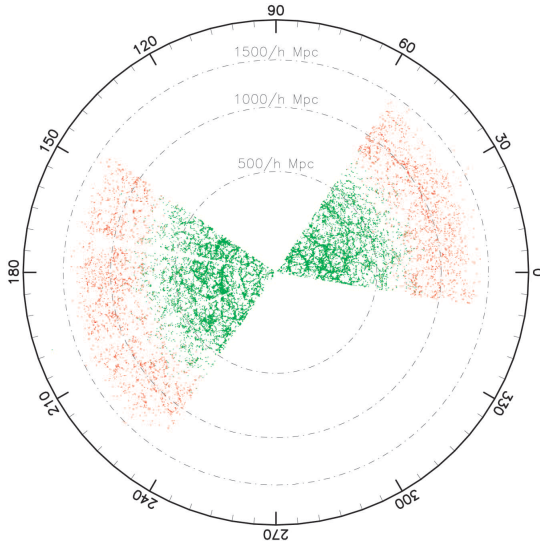


Figura 1: Distribuição de galáxias em grandes escalas a partir do projeto Sloan. O eixo no sentido do perímetro da imagem indica as direções observadas no céu, em graus, nem todas direções foram observadas, uma vez que, nossa Galáxia dificulta as observações no sentido do disco. A escala no sentido radial é a escala de distância em Mpc, onde h é parâmetro de *Hubble* normalizado. Na imagem é possível notar um alto grau de homogeneidade nas distribuições de galáxias independentemente da direção observada (somente nas regiões que os dados estão disponíveis). Figura retirada da ref. [47].

2.2 A Cosmologia Relativística

O final do século XIX, foi uma época bastante crucial para os rumos da física. Houve cogitações de que, além de pequenos detalhes a serem acrescentados ou modificados, as contribuições nessa área estavam com os dias contados, não haveria mais conhecimentos para serem descobertos, e alguns cientistas na ocasião afirmavam que todo o conhecimento da “Física Clássica” já estava quase totalmente compreendido [48]. No entanto, no início do século XX, *M. Planck*, *A. Einstein*, entre outros, tiveram um papel importante na mudança de paradigma da ciência naquele instante. Devido as contradições e incompatibilidades em certos aspectos na teoria da mecânica de *Isaac Newton* com a do eletromagnetismo de *J. Maxwell*, *Einstein* formulou a TRE ou Teoria da Relatividade Restrita (TRR), em 1905 e em 1915 ele apresentou a versão completa mais generalizada a referências acelerados, a Teoria da Relatividade Geral [13, 49]. Como já comentado anteriormente (na Seção 1), em 1917, ele apresentou o primeiro modelo cosmológico que se baseava na TRG, era um Universo estático e com matéria. Em seguida, em

1922 e 1924, *A. Friedmann* formulou soluções expansi-onista, dando assim, dinâmica ao Universo [2, 50]. Posteriormente a este, *Robertson* e *Walker* obtiveram outras soluções de Universo. Assim, surge a métrica FRW que satisfaz a homogeneidade e isotropia do Universo [7, 51].

2.2.1 A Teoria da Relatividade Especial

Na Teoria da Relatividade Restrita, o espaço e o tempo passam a se relacionar. Enquanto na física clássica, a velocidade da luz tem um valor infinito, na TRE ela passa a ter um valor finito, sustentado pelo eletromagnetismo, e é o mesmo para qualquer referencial inercial no vácuo, ou seja, a velocidade da luz é um invariante (um dos postulados de Einstein). As conexões entre diferentes referenciais inerciais se dão pelas as *transformações de Lorentz* (em homenagem ao descobridor, *H. A. Lorentz*), para coordenadas $(x, y, z, e t)$ do referencial S e $(x', y', z' e t')$ para S' , sendo S' se afastando de S com velocidade \vec{v} paralela ao longo do eixo Ox (visto na Fig. 2) são dadas por:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (1)$$

$$y' = y \quad (2)$$

$$z' = z \quad (3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (4)$$

onde $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ é o fator de contração de Lorentz [22, 49].

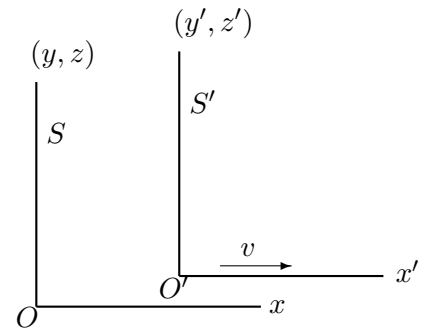


Figura 2: O referencial S está em repouso, enquanto o referencial S' move-se com velocidade v relativa, afastando-se do referencial S ao longo do eixo Ox .

Nesta teoria (TRE), o espaço-tempo é regido pela geometria minkowskiana. O intervalo (elemento de linha) entre dois eventos¹² é definido como [13, 49],

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5)$$

onde ds^2 é uma grandeza física que independe do refe-

¹²Evento é definido como um fenômeno físico que acontece em uma certa posição do espaço e do tempo (x, y, z, t) ou (x', y', z', t') .

rencial ($ds^2 = ds'^2 = ds''^2 = \dots$). Ou ainda, na notação mais compacta (notação tensorial) é expressado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6)$$

com $\eta_{\mu\nu}$ sendo o tensor de métrica do espaço-tempo plano ($\eta_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} = \text{diagonal}(-1, 1, 1, 1)$, em coordenadas cartesianas) e x^μ e x^ν são as coordenadas espacial e temporal (com os índices gregos μ e ν variando de 0 a 3, para $\mu = \nu$, $\eta_{\mu\nu} = 1$ (quando $\mu, \nu \neq 0$) e $\eta_{\mu\nu} = -1$ (quando $\mu, \nu = 0$), para $\mu \neq \nu$, $\eta_{\mu\nu} = 0$), onde ($x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$) é o quadri-vetor posição do espaço-tempo [14, 49, 52, 53].

2.2.2 A Teoria da Relatividade Geral

Na TRG, em 1915, a velocidade da luz, c , não é mais uma constante e tem dependência do sistema de coordenadas quando um campo gravitacional está atuando. Com isso, a TRG só é válida se obedecer o sistema de *coordenadas gaussianas*¹³, onde as curvas não se intersectam e para cada ponto da superfície, há apenas, uma única curva que passa por ele (ver Figura 3). Dessa forma, a TRG passa a ter o carácter universal sobre a gravitação, uma vez que, a TRE estava restrita a campos gravitacionais nulos [6].

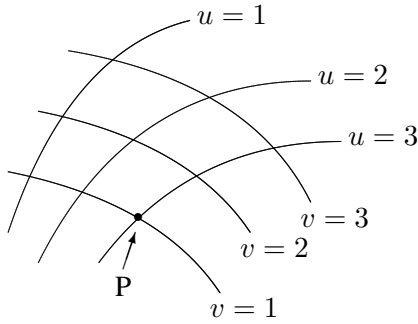


Figura 3: Conjuntos de curvas u , que em uma certa direção chamamos por u , ou seja, $u = 1, u = 2, \dots$, entre as curvas $u = 1$ e $u = 2$ pode ser imaginado que existe um número infinito de curvas. As curvas não se intersectam e para cada ponto da superfície, há apenas, uma curva que passa por ele. Estabelecendo um sistema de coordenadas v sobre a superfície, de modo que, os valores de u e v sejam estabelecido para cada ponto da superfície. Figura baseada na ref. [6].

A TRG e a gravitação Universal de Isaac Newton são compatíveis quando os campos gravitacionais forem fracos ou desprezíveis. A equação de campo de Einstein que descreve a dinâmica curva e o movimento local da

matéria-energia, é dada por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (7)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de espaço-tempo (tensor de Ricci), $g_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor de métrica, R é o escalar de curvatura de Ricci, G é a constante gravitacional de Newton, $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ é a contante gravitacional de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia e os índices μ e ν variam de 0 a 3 [6, 13].

Da eq. (6), na TRG, o espaço-tempo não tem as mesmas propriedades dessa métrica. Uma vez que, o espaço-tempo passa a ter uma forma curva, devidos aos efeitos da gravitação. Assim, o elemento de linha nessa geometria é dado por [14],

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica para o espaço-tempo curvo, ou seja, é este fator que determina como medidas de distâncias devem ser efetuadas.

2.2.3 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Da mesma forma que na eq. (5) e (8), a separação entre dois eventos localizados em (t, r, θ, ϕ) e em $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ na métrica de minkowskiana em coordenadas esféricas é dada por [2],

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (9)$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Das eqs. (8) e (9), a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) em coordenadas esféricas é dada pelo elemento de linha, que de forma mais geral, satisfaz a homogeneidade e isotopia do Universo [7, 51, 54] (detalhes e demonstrações do cálculo podem ser vistos nas refs. [39, cap. 6], [55, cap. 21] e [56, cap. 3]),

$$ds^2 = -(cdt)^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right], \quad (10)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala (não confundir com o tensor escalar de Ricci), k corresponde ao tipo de curvatura do Universo, podendo assumir valores 1, 0 e -1 , correspondendo ao Universo espacialmente elíptico (esférico), plano (euclidiano), hiperbólico (aberto), respectivamente (ver Figura 4). Já a coordenada temporal, t ,

¹³Sistema de coordenadas não euclidiano e geral. Um sistema no qual podemos imaginar curvas arbitrárias, mas que não se cruzam (não ficam justapostas) numa superfície qualquer.

¹⁴Sistema de coordenadas que se move juntamente com a fonte.

é medida em repouso pelas as coordenadas comóveis¹⁴. E as componentes de $g_{\mu\nu}$ nessa métrica são dadas por: $g_{00} = -1$, $g_{11} = R^2(t)/(1 - kr^2)$, $g_{22} = R^2(t)r^2$, $g_{33} = R^2(t)r^2 \sin^2\theta$ e $g_{\mu\nu} = 0$, para $\mu \neq \nu$ [14, 56].

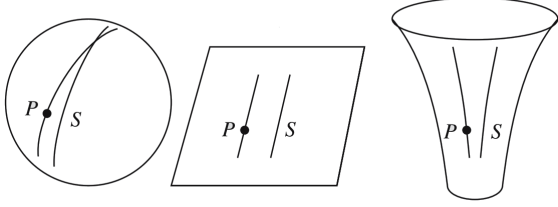


Figura 4: Representação bidimensional de geometrias do Universo com superfície esférica, plana e hiperbólica, respectivamente, no sentido da esquerda para direita da imagem. Figura adaptada da ref. [7].

2.2.4 Equações de Friedmann

Em 1917, *Albert Einstein* apresentou um modelo cosmológico baseado na TRG. Um Universo esférico e estático com volume finito e sem bordas. Estava de acordo com o *Princípio Cosmológico*, era homogêneo e isotrópico. Inicialmente, Einstein colocou um termo cosmológico (a constante cosmológica Λ) em seu modelo, para obter um Universo que fosse estático. No entanto, quando a expansão do universo foi descoberta, ele classificou esse termo como sendo o pior erro de sua vida. Só que, as observações modernas (após o final da década de 90) da Astronomia introduziram novamente essa terminologia [7]. Posteriormente a este, como vimos, *A. Friedmann* encontrou soluções para a dinâmica do Universo, em 1922 e 1924, para curvatura positiva e curvatura negativa, respectivamente. Essas soluções podem ser obtidas a partir de uma descrição newtoniana, assim como por meio da TRG [2, 50].

Na TRG, a partir do tensor *stress-energy* para um fluido perfeito¹⁵ [39, 57, 58, 59, 60],

$$T_{\mu\nu} = \text{diagonal}(\rho c^2, p, p, p) \quad (11)$$

$$= (p + \rho c^2)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \quad (12)$$

onde $T_{\mu\nu}$ contém as componentes do tensor stress-energia, mais conhecido neste caso como tensor *momento-energia* ($T_{00} = \rho c^2$, $T_{ij} = p$, se $i = j$ e $T_{ij} = 0$ quando $i \neq j$), $U_\mu, U_\nu = (-1, 0, 0, 0)$ é as componentes do quadrivetor-velocidade (com índices abaixados), ρ é a densidade de energia, p é a pressão, T_{0i} é o fluxo de energia ($T_{0i} = 0$), T_{i0} é a densidade de momento ($T_{i0} = 0$), T_{ij} é o fluxo de momento, com os índices i e j variando de 1, 2 e 3 e $g_{\mu\nu}$ é o tensor de métrica (neste

caso, a métrica FRW) [39, 54, 58].

A partir das equações do tensor momento-energia e da métrica FRW (eqs. (12) e (10)), substituindo na equação de campos de Einstein (eq. (7)), com a demonstração propositalmente ocultada aqui (uma consulta nas refs. [38, cap. 1], [55, cap. 22] e [61, cap. 4] é útil na compreensão), não é trivial ver que obtém-se [38, 52, 54, 55, 61],

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2kc^2}{R^2} = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho c^2 - p), \quad (13)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3p), \quad (14)$$

onde esta é conhecida como a *equação da aceleração*. Substituindo a eq. (14) em (13), dessa forma,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2}, \quad (15)$$

onde esta é a *equação de Friedmann* na forma padrão, obtida a partir da descrição da TGR.

Diferenciando a eq. (15) com relação ao tempo cósmico t , tem-se que [55],

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}G\dot{\rho}R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho 2R\dot{R}, \quad (16)$$

reorganizando,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}\frac{R}{\dot{R}} + \frac{4\pi G}{3}2\rho. \quad (17)$$

Substituindo a eq. (17) na eq. (14), obtemos,

$$\frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}\frac{R}{\dot{R}} + \frac{4\pi G}{3}\rho = \frac{4\pi G}{3c^2}3p, \quad (18)$$

simplificando e reorganizando em termos de $\dot{\rho}$, obtém-se,

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{R}}{Rc^2}(\rho c^2 + p), \quad (19)$$

onde esta equação trata-se da *lei de conservação*, advinda do tensor energia-momento ($T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$) [38, 55]. Se tivéssemos trabalhado desde o início com as equações de campos de Einstein (eq. (7)) acrescentado da constante cosmológica (Λ), a eq. (19) mesmo assim não teria sua forma alterada, uma vez que, as constantes k e Λ desaparecem na derivação com relação ao tempo [1].

A solução para a eq. (19) é caracterizada com parâmetros cosmológicos da *Equação de Estado (EE)* do tipo,

$$p = \omega \rho c^2, \quad (20)$$

¹⁵O Universo é descrito como um fluido perfeito, único sistema físico que obedece ao PC, não existindo fluxo de calor ou efeitos de cisalhamento em largas escalas.

onde ω é um parâmetro da EE de valor constante, p é a pressão, ρ é a densidade de energia e c é a velocidade da luz ($c \simeq 2,998 \times 10^8 m/s$ ou em alguns casos, para facilitar os cálculos, usa-se $c = 1$. Neste trabalho, explicaremos $c \neq 1$, exceto quando dito o contrário). Dessa forma, a solução para a *lei de conservação* (eq. (19)) é dada por [1, 38, 57],

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)} = \rho_0 (1+z)^{3(1+\omega)}, \quad (21)$$

onde $\frac{R_0}{R} \equiv (1+z)$ obtido a partir da relação de *expansão de redshift* [9] (z é o *redshift* observado), ρ_0 e R_0 são a densidade de energia e o fator de escala para o tempo atual, respectivamente. Seguem-se os seguintes casos especiais [1, 14, 21, 38]:

Caso I: Um Universo *dominado por matéria*, preenchido por matéria fria não-relativística sob a forma de poeira, sem radiação e sem pressão. Com $p = 0$ ($\omega = 0$), a densidade de energia da matéria evolui por,

$$\rho_M = \rho_{M0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \rho_{M0} (1+z)^3, \quad (22)$$

onde ρ_{M0} é a densidade energia da matéria medida hoje.

Caso II: Um Universo *dominado por radiação*, preenchido por um gás quente ultra-relativístico¹⁶ sob a forma de partículas quente (matéria quente). Com $p = \frac{1}{3}\rho R c^2$ ($\omega = \frac{1}{3}$), dessa forma, a densidade de energia da radiação evolui por,

$$\rho_R = \rho_{R0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^4 = \rho_{R0} (1+z)^4, \quad (23)$$

onde ρ_{R0} é a densidade de energia da radiação medida hoje.

Caso III: Estado de *energia de vácuo* que corresponde a um Universo plano e estático ($\ddot{R} = \dot{R} = 0$), sem poeira ou radiação, porém, constituído de um termo cosmológico. Com uma componente de pressão negativa $p = -\rho_\Lambda c^2$ ($\omega = -1$), a densidade de energia de vácuo (densidade de energia escura) evolui por,

$$\begin{aligned} \rho_\Lambda &= \rho_{\Lambda 0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^0 = \rho_{\Lambda 0} (1+z)^0 \\ &= \rho_{\Lambda 0} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \end{aligned} \quad (24)$$

onde $\rho_{\Lambda 0}$ é densidade de energia de vácuo medida hoje, Λ é a constante cosmológica.

Caso IV: Corresponde ao caso da *curvatura do Universo*. Com $p = -\frac{1}{3}\rho_k c^2$ ($\omega = -\frac{1}{3}$), onde a densidade de curvatura evolui por,

$$\rho_k = \rho_{k0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = \rho_{k0} (1+z)^2, \quad (25)$$

onde ρ_{k0} é a densidade de curvatura medida hoje.

Caso V: Considerando um caso geral de um *fluido desconhecido* e de EE arbitrária com componente ω_i , a sua densidade de energia evolui por

$$\rho_i = \rho_{i0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega_i)} = \rho_{i0} (1+z)^{3(1+\omega_i)}, \quad (26)$$

onde ρ_{i0} é a densidade do fluido desconhecido medida hoje.

Da equação de *Friedmann* (eq. (15)) e acrescentando o termo cosmológico,

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho + \frac{1}{3}\Lambda c^2 - \frac{kc^2}{R^2}, \quad (27)$$

podemos reescrever a equação (27) em termos de cada componente de densidade de energia que contribui (densidade de energia da matéria (ρ_M), densidade de energia da radiação (ρ_R) e densidade de energia do vácuo (ρ_Λ)) [21],

$$H^2(t) \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G(\rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{R^2}. \quad (28)$$

Na consideração agora de uma região esférica, onde a descrição do movimento pode ser obtida a partir apenas do argumento da simples conservação de energia. No caso em que $E = 0$ e considerando um tempo qualquer, a *densidade crítica do Universo*, ρ_c , é obtida por [7, 22],

$$\rho_c = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}, \quad (29)$$

onde $H(t)$ é o *parâmetro de Hubble*. Quando $H(t_0) \equiv H_0$ é o parâmetro de Hubble para o tempo atual, conhecida como constante de Hubble, H_0 ($H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3,24 \times 10^{-18} \text{ hs}^{-1}$, com h dentro dos valores entre 0,3 e 1, dependendo de modelos ou métodos cosmológicos). A razão entre a densidade de energia ($\rho(t)$) e a densidade crítica (ρ_c) é definida como *parâmetro de densidade de energia*, $\Omega(t)$,

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)}. \quad (30)$$

¹⁶Gás de partículas quente cujas velocidades são próximas da velocidade da luz.

E para o tempo atual,

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2}. \quad (31)$$

Diante disso, a partir das eqs. (22), (23), (24), (25), (29), (31) e (30), podemos reescrever a eq. (28) em termos dos parâmetros de densidades e *redshifts* [1, 14, 21, 38, 54, 59],

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4], \quad (32)$$

onde Ω_{M0} , Ω_{R0} e Ω_Λ são, respectivamente, os parâmetros de densidade da matéria, radiação e energia do vácuo (energia escura) medidos atualmente. Já $\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$ define-se como parâmetro de densidade de curvatura espacial medido hoje.

Para o tempo atual ($z = 0$), da eq. (32) tem-se a seguinte relação,

$$\Omega_0 \equiv \Omega_\Lambda + \Omega_{k0} + \Omega_{M0} + \Omega_{R0} = 1. \quad (33)$$

A eq. (33) permite obter possibilidades e estimativas de como a curvatura do espaço se correlacionam com a matéria e energia do universo [13, 14, 21, 38, 43, 56, 62],

$$\Omega_0 \implies \begin{cases} > 1, & \text{Universo fechado } (k = 1), \\ = 1, & \text{Universo plano } (k = 0), \\ < 1, & \text{Universo aberto } (k = -1). \end{cases} \quad (34)$$

De modo geral, podemos reescrever equação de Friedmann (eq. (32)) da seguinte maneira [38, 54, 62],

$$H^2(z) = H_0^2 E(z). \quad (35)$$

onde no modelo padrão atual $E(z) = [\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4]$ é a soma dos parâmetros de densidade para um tempo t .

Integrando a equação (35) obtém-se a idade do Universo para um tempo t ($\frac{1}{R^2}(\frac{dR}{dt})^2 = H_0^2 E$),

$$\int_0^t dt = \int_0^R \frac{dR}{H_0 R E^{1/2}}, \quad (36)$$

relacionando-se com relação de expansão de *redshift* ($\frac{R_0}{R} \equiv (1+z)$, $dR = \frac{-R_0 dz}{(1+z)^2}$) e resolvendo a integral do lado esquerdo da expressão, chegaremos na idade do Universo ($t(z) \equiv t_z$) para um dado *redshift* (z),

$$t_z = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)^{1/2}}. \quad (37)$$

Para a idade do Universo hoje ($z = 0$), tem-se,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)^{1/2}}. \quad (38)$$

3 Teste de *redshift* em Lookback Time

Aqui serão apresentados a teoria no *Lookback Time* (LT), as descrições dos dados e da análise estatística envolvida.

3.1 Teoria Envolvida no Lookback Time

O *Lookback Time*, t_L , é definido como a diferença entre a idade atual do Universo, $t(0) \equiv t_0$, e a idade dada em um certo *redshift* z quando a luz foi emitida, $t(z) \equiv t_z$. A partir das eqs. (37) e (38), a diferença entre a idade atual, t_0 , do Universo e sua idade no tempo, t_z , é expressada por [21, 30, 57, 63],

$$t_L = t_0 - t_z, \quad (39)$$

$$t_L = \int_{t_z}^{t_0} dt = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)E(z)^{1/2}}. \quad (40)$$

Expressando a eq. (40) em termos de um conjunto de parametrização $\{\mathbf{p}\}$, a relação de *redshift em Lookback time* pode ser escrita como,

$$t_L(z; \mathbf{p}) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)E(z, \mathbf{p})^{1/2}}, \quad (41)$$

com a equação de Friedmann (eq. (35)) expressada por¹⁷:

- Para o Λ CDM plano,

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_\Lambda + \Omega_{m0}(1+z)^3]. \quad (42)$$

- Para o Λ CDM não plano,

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_\Lambda + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3]. \quad (43)$$

- Para o X CDM plano¹⁸,

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_x(1+z)^{3(1+\omega)}]. \quad (44)$$

Onde o conjunto completo de parâmetros de interesse são dados por $\{\mathbf{p}\} = \{H_0, \Omega_m\}$, $\{\mathbf{p}\} = \{H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda\}$ e $\{\mathbf{p}\} = \{H_0, \Omega_m, \omega\}$ que respectivamente representam o modelo Λ CDM Plano, Λ CDM não Plano e X CDM

¹⁷O parâmetro de densidade da radiação para o tempo atual (Ω_{R0}) é da ordem de $\sim 10^{-4}$ ($\Omega_{R0} \rightarrow 0$). Dessa forma, foi desconsiderado por Dantas nos cálculos.

¹⁸Este torna-se o próprio modelo padrão quando $\omega = -1$.

Plano [30, 63].

Dando prosseguimento, considerando um objeto astronômico que esteja em um *redshift* z_i e idade $t(z_i)$. A diferença entre a idade do Universo em z_i e de quando o objeto foi formado z_F é definida por [30, 64],

$$t(z_i) = \left[\frac{1}{H_0} \int_{z_i}^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z, \mathbf{p})^{1/2}} + \frac{1}{H_0} \int_{z_F}^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z, \mathbf{p})^{1/2}} \right], \quad (45)$$

ou

$$\begin{aligned} t(z_i) &= t_L(z_F) - t_L(z_i) \\ &= \frac{1}{H_0} \int_{z_i}^{z_F} \frac{dz}{(1+z)E(z, \mathbf{p})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Da eq. (46) e da esquematização vista na Figura 5, o LT para um objeto observado é definido como [30],

$$\begin{aligned} t_L^{obs}(z_i; \tau) &= t_L(z_F) - t(z_i) \\ &= [t_0^{obs} - t(z_i)] - [t_0^{obs} - t_L(z_F)] \\ &= t_0^{obs} - t(z_i) - \tau_i \end{aligned} \quad (47)$$

onde t_0^{obs} é a idade estimada para o Universo hoje, e τ_i é o fator de atraso (tempo de incubação) e é definido por,

$$\tau_i = t_0^{obs} - t_L(z_F), \quad (48)$$

que leva em conta nossa ignorância quanto à quantidade de tempo desde a formação de estrutura do Universo até o tempo que o objeto i levou para se formar (t_F^i).

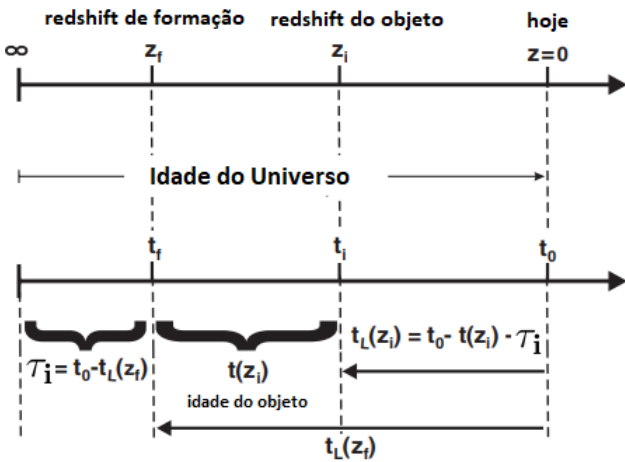


Figura 5: Esquematização mostrando a idade do Universo, o Lookback time, e grandezas relacionadas. Figura adaptada da ref. [65].

3.2 Análise Estatística

A função distribuição de densidade de probabilidade (FDDP) ou simplesmente “função likelihood” dá a estimativa do melhor ajuste para o conjunto de parâmetros $\{\mathbf{p}\}$. Ela é definida por [30, 66, 67],

$$\mathcal{L}_{idade} \propto \exp \left[\frac{-\chi_{idade}^2(z; \mathbf{p}, \tau_i)}{2} \right] \quad (49)$$

onde a função *qui-quadrado* (χ_{idade}^2) a partir do método dos mínimos quadrados (MMQ) e do conjunto de parametrização $\{\mathbf{p}\}$, pode ser escrita por,

$$\begin{aligned} \chi_{idade}^2(z; \mathbf{p}, \tau_i) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{[t_L(z_i; \mathbf{p}) - t_L^{obs}(z_i; \tau_i)]^2}{\tilde{\sigma}_i^2} \right\} + \\ &\quad + \frac{[t_0(\mathbf{p}) - t_0^{obs}]^2}{\sigma_{t_0^{obs}}^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

onde $\tilde{\sigma}_i^2 \equiv \sigma_i^2 + \sigma_{t_0^{obs}}^2$, σ_i^2 é a incerteza individual no *lookback time* para a i -ésima galáxia da amostra e $\sigma_{t_0^{obs}}^2$ é a incerteza sobre a idade total de expansão do Universo (t_0^{obs}). O fator de atraso τ_i deve variar seu valor para cada objeto da amostra, uma vez que, as galáxias são formadas em épocas diferentes.

Um outro aspecto importante com relação ao fator de atraso τ_i , é que o mesmo é assumido como um parâmetro de “ruído” para cada objeto. De forma que é considerado uma “margem”, de modo que esse efeito pode ser eliminado a partir de forma analítica da modificação da função *qui-quadrado* ($\tilde{\chi}^2$) do *log-likelihood* por um número n de integrações, por definição [30],

$$\tilde{\chi}^2 = -2 \ln \left(\int_0^\infty \dots \int_0^\infty d\tau_i e^{[-\frac{1}{2}\chi_{idade}^2(z; \mathbf{p}, \tau_i)]} \right) \quad (51)$$

$$= n \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i^2} \right) - 2 \sum_{i=1}^n \ln [erf(A_i)] + E, \quad (52)$$

com $A_i = \left(\frac{\Delta_i}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_i} \right)$, $\Delta_i = t_L(z_i; \mathbf{p}) - [t_0^{obs} - t(z_i)]$, onde E é segundo termo do lado direito da equação (50).

3.3 Dados

A partir do método descrito na Subseção 3.2, M. A. Dantas et al. (2009) [30] usou estimativas de idade de 32 galáxias antigas, que estavam compreendidas no intervalo de *redshift* de 0, $11 \leq z \leq 1$, 84, também analisados anteriormente por J. Simon et al. (2005) [68] e N. Pires et al. (2006) [65], usando os modelos SPEED¹⁹ abordados por Jimenez et al. (2004) [69] para obter as ida-

¹⁹Modelo sintético que reproduz com precisão propriedades estelares individuais e de protogaláxias primordiais, tais como idade, metalicidade, etc.

des. O catálogo Gemini Deep Deep Survey (GDDS) [70] lançou publicamente 20 galáxias vermelhas; Simon [68] reanalisaram antigas amostras do GDDS, por intermédio de diferentes modelos de população estelar e obteve idades de $0,1 \text{ Ganos}$, a partir das estimativas de colaboração GDDS e de duas galáxias de observações na frequência de rádio LBDS 53W091 e LBDS 53W069 [71].

De acordo com a eq. (47), Dantas [30] combinou amostras de galáxias, citada acima, com estimativas da idade total do Universo t_0^{obs} , para construir amostras de LT. Foi assumido que $t_0^{obs} = 13,7 \pm 0,2 \text{ Ganos}$, advindos de uma análise conjunta envolvendo dados de recentes experimentos da CMB (WMAP²⁰, DASI²¹, VSA²², ACBAR²³, MAXIMA²⁴, CBI²⁵ e BOOMERANG²⁶) [32, 45, 46]. Nas Figs. 6 (a) e (b) foram mostrados por Dantas [30] estimativas de idades originais e de LT em função do *redshift* observado para as 32 galáxias da ref. [68].

4 Resultados

Nesta parte, estamos interessados em discutir os resultados obtidos por Dantas [30] e outras colaborações. Como, de modo quantitativo, a amostra de LT pode impor limites na EE e na caracterização de parâmetros de densidades da matéria escura e energia escura, sob o ponto de vista da análise estatística dos dados. A análise feita refere-se a dois cenários possíveis de energia escura: o cenário Λ CDM (curvatura plana), contendo a constante cosmológica e matéria escura não-relativística, e um universo espacialmente plano, com matéria escura não-relativística e uma outra componente de pressão negativa (ω CDM), com equação de estado $p = \omega \rho c^2$.

4.1 Modelo Λ CDM Plano

Nas Figuras 7 (a)-(c), mostramos os resultados das análises estatísticas de alguns parâmetros cosmológicos realizados por Dantas [30]. Para tanto, fixando $\omega = -1$ e fazendo uso da eq. (42), a Figura 7 (a) são mostrados as regiões em 68,3% (1σ) e 95,4% (2σ) de Nível de Confiança (*Confiance Level* - *C.L.*) do plano $\Omega_m - h$ para o χ_{idade}^2 expressados nas eqs. (49), (50), (51) e

(52). Neste caso, o parâmetro de Hubble foi fixado em $H_0 = 0,72 \pm 0,08 \text{ Km/s/Mpc}$, como publicado pelo projeto *Hubble Space Telescope (HST)* [80] em 2001. Os autores de [30] obtiveram estimativas advindas de $t_L(z)$, para 95,4% (C.L.), sendo: $0,18 \leq \Omega_m \leq 0,23$, ou ainda, $0,74 \leq \Omega_\Lambda \leq 0,77$ ($\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$).

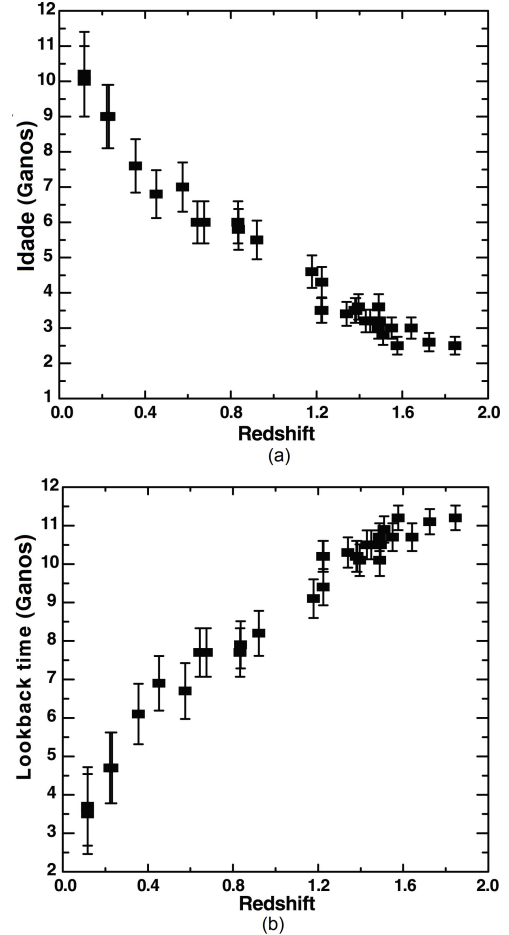


Figura 6: Figuras com dados de idade vs. *redshift*. (a) Uma amostra de 32 galáxias compreendidas no intervalo de *redshift* de $0,11 \leq z \leq 1,84$, incluindo observações do catálogo GDDS [70] e arquivo de dados da ref. [71]. (b) Representa amostra de LT, foram combinadas medidas dessas 32 galáxias com estimativas de idade total do Universo $t_0^{obs} = 13,7 \pm 0,2 \text{ Ganos}$, advindos de uma análise conjunta envolvendo dados da CMB [32, 45, 46]. Figuras adaptadas da ref. [30].

²⁰Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) foi uma missão (sonda espacial) da NASA para estudar o Cosmos em frequências de micro-ondas (<https://www.nasa.gov/topics/universe/features/wmap-complete.html>).

²¹Degree Angular Scale Interferometer (DASI) é interferômetro de baixa potência, operando em frequências baixas ($\sim 30 \text{ GHz}$) [72, 73].

²²Very Small Array (VSA) é um rádio-interferômetro construído para operar em pequenas frequências ($\sim 30 \text{ GHz}$) e baixas potências [46, 72].

²³Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver (ACBAR) é um instrumento projetado para produzir imagens detalhadas da CMB em três faixas de comprimento de onda milimétricos, operando em altas frequências ($\sim 100 \text{ GHz}$) [72, 74, 75].

²⁴Millimeter-wave Anisotropy Experiment Imaging Array (MAXIMA) é um experimento baseado em balão projetado para mapear a anisotropia a partir da medição da temperatura na CMB, operando em frequências maiores que 100 GHz [46, 72, 76, 77].

²⁵Cosmic Background Imager (CBI) é uma matriz de interferômetro planar de 13 antenas individuais, operando em altas frequências ($\sim 100 \text{ GHz}$) [46, 78].

²⁶Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation AND Geophysics (BOOMERANG) foi um telescópio de balão projetado para voos de longa duração ao redor da Antártida, operando em altas frequências ($>100 \text{ GHz}$). [46, 79].

Na Figura 7 (b) é mostrada a função likelihood vs. o parâmetro de densidade de matéria. As linhas que cortam as regiões são os níveis de confiança estatística de 68,3% e 95,4% (C.L.). Para o (C.L.) de 95,4%, foi obtido $\Omega_m = 0,259 \pm 0,030$, concordando com os valores da CMB²⁷ [32, 44, 45, 46]. Já na Figura 7 (c) é mostrado Ω_m vs. Ω_Λ com curvatura livre. Neste caso, os víncu-

los são mais fracos ($\Omega_k R^{-2} = (1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda) R^{-2}$ em $E(z, p)$ da eq. (43), com $R_0 \equiv 1$). O resultados são poucos restritivos e diferem de recentes utilizando dados de SNe Ia (ver Figura 8) [81, 82]. Os resultados obtidos por Dantas [30] foram $\Omega_k \simeq 0,7, 0,03 \leq \Omega_m \leq 0,1$ e $0,15 \leq \Omega_\Lambda \leq 0,32$ para 95,4% (2σ) (C.L.).

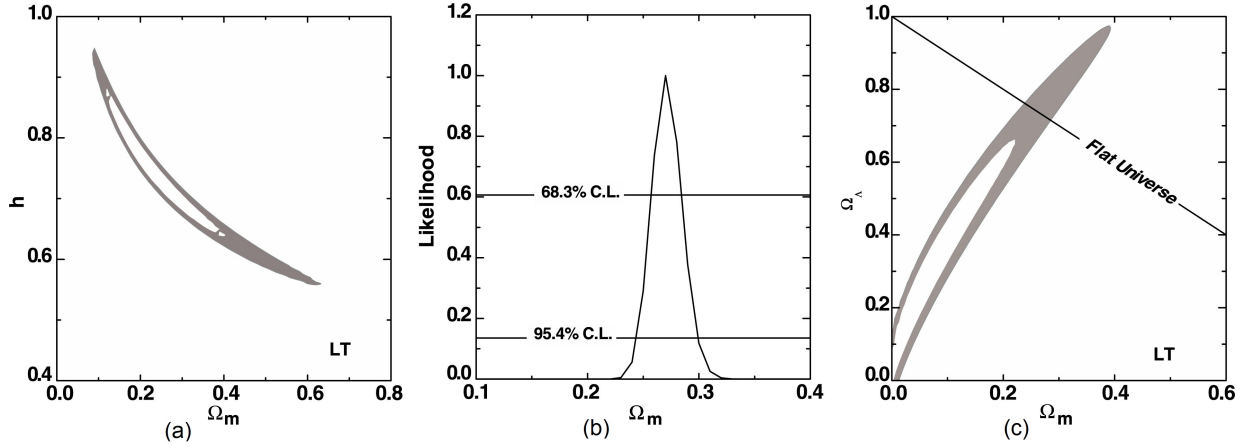


Figura 7: (a) Figura mostrando parcelas de contorno com níveis de confiança (C.L.) de 68,3% e 95,4% a partir da análise de LT. (b) Gráfico da função likelihood vs. Ω_m . Em 95,4% (C.L.) foi obtido $\Omega_m = 0,259 \pm 0,030$ para o melhor ajuste. (c) Plano Ω_m - Ω_Λ a partir da análise com LT. O melhor ajuste acontece para um Universo com geometria espacial aberta com $\Omega_k \simeq 0,7$. Figuras retiradas da ref. [30].

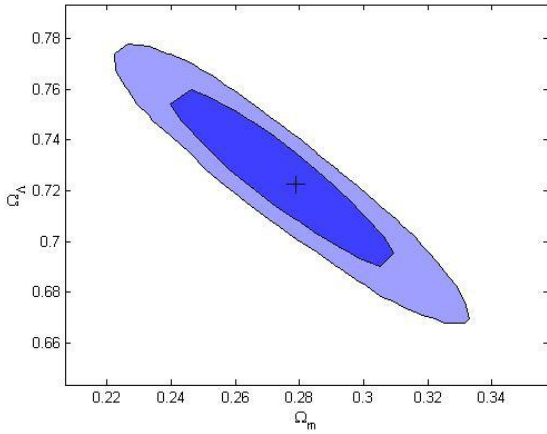


Figura 8: Plano Ω_m - Ω_Λ mostrando parcelas de contorno com níveis de confiança (C.L.) de 68,3% e 95,4% a partir da análise de SNe Ia+CMB dados do WMAP. O melhor ajuste acontece para $\Omega_m = 0,28$, $\Omega_\Lambda = 0,72$ e $\omega = -1$ (e considerando dados somente de SNe Ia o melhor ajuste ocorre para $\Omega_m = 0,18$, $\Omega_\Lambda = 0,82$ e $\omega = -1$). Figura retirada da ref. [81].

4.2 Modelo ω CDM

Na Figura 9 é mostrado uma plotagem de ω vs. Ω_m , com regiões de 68,3% e 95,4% (C.L.) e com dados ape-

nas de LT. Para este conjunto de dados Dantas [30] determinou que o melhor ajuste acontece para valores de $\Omega_m \simeq 0,1$ e $\omega \simeq -0,46$. Embora percebe-se que um grande intervalo de valores é permitido para ω , não sendo este tipo de teste eficiente para vincular o parâmetro ω , até o momento.

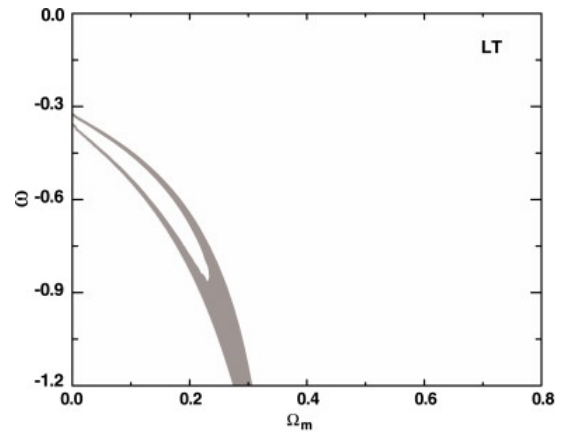


Figura 9: Modelo ω CDM com dados de LT com níveis de confiança de 68,3% e 95,4%. O melhor ajuste modelado acontece para valores de $\Omega_m \simeq 0,1$ e $\omega \simeq -0,46$. Figura retirada da ref. [30].

A partir da discussão da ref. [63], os resultados ob-

²⁷Com erro relativo de 7,5% com relação aos valores da CMB e com margens de erros englobada dentro do valor(ver tabela 17 da ref. [44]).

tidos por observações de *Sne Ia* são semelhantes aos obtidos por *Dantas* [30] com dados de LT, apesar que a física das observações serem bastante diferenciadas. No entanto, pode fornecer uma forma alternativa de calcular parâmetros cosmológicos, tão bons quanto os de *SNe Ia* [82].

5 Conclusões e Perspectivas Futuras

Ao longo deste trabalho foi efetuada uma pequena abordagem discursiva sobre alguns dos principais pontos da cosmologia moderna (cosmologia relativística). Foi discutido também limites sobre parâmetros cosmológicos a partir de amostras de idades (LT) em altos *redshift* e idade total do Universo, analisados por [30].

Nas Seções 1 e 2 foi introduzido e discutido uma revisão da literatura da cosmologia relativística. Abordamos conceitos de homogeneidade e isotropia do Universo. Fizemos uma descrição da TRE e TRG. Apresentamos o surgimento do primeiro modelo cosmológico relativístico. Introduzimos a métrica FRW, além dos modelos cosmológicos de evolução do Universo apresentados por Friedmann.

Na Seção 3 apresentamos a teoria do teste LT para altos *redshifts* e a análise estatística dos dados através do método do mínimo quadrado (qui-quadrado) para a função de distribuição de densidade de probabilidade (*função likelihood*) para a obtenção do melhor ajuste, a partir de dados do catálogo GDDS, projeto HST, dados da CMB, fazendo uso do modelos SPEED e outras colaborações.

Na Seção 4 mostramos os resultados das análises por [30] de alguns parâmetros cosmológicos, sob o ponto de vista de vista de dois cenários: Λ CDM e ω CDM. A partir da Figura 7 (a) para regiões em 68,3% (1σ) e 95,4% (2σ) de (C.L.). O melhor ajuste para 95,4% (C.L.) foi obtido $0,18 \leq \Omega_m \leq 0,23$, ou seja, $0,74 \leq \Omega_\Lambda \leq 0,77$, onde foi utilizado $h = 0,72 \pm 0,08$ de acordo com o HST. Na Figura 7 (b) para o (C.L.) de 95,4%, foi obtido $\Omega_m = 0,259 \pm 0,030$, concordando com os valores da CMB [32, 45, 46, 44]. Já na Figura 7 (c) vimos que existe uma grande degenerescência no espaço de parâmetros. Na Figura 9 para o conjunto de dados *Dantas* [30] determinou que o melhor ajuste modelado acontece para valores de $\Omega_m \simeq 0,1$ e $\omega \simeq -0,46$. Aqui, novamente, vimos que existe uma grande degenerescência no espaço de parâmetros. Isto indica que é necessária adição de outros observáveis para a obtenção de um espaço mais restritivo.

Combinar diferentes modelos, métodos e técnicas cosmológicas significa uma melhor restrição aos valores de parâmetros cosmológicos e mais curável e confiável serão os resultados, se ambos têm algo em comum. Com

isso, como perspectivas futuras, o método de LT pode fornecer uma alternativa complementar e ser competitivo a outros métodos, uma vez que é independente de modelos cosmológicos.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a todos aqueles que de alguma forma tiveram contribuições importantes na minha formação como pessoa e como profissional.

Agradeço aos colegas e amigos que estiveram comigo durante meu estágio como monitor na Casa de Ciência e Tecnologia da Cidade de Aracaju, em especial ao Prof. Augusto César (coordenador da CCTECA e membro da SEASE) e Jeane Santana (Secretária da CCTECA), pela confiança e aposta depositada em mim, à Kesia Cristina, Raiany Rodrigues, Valdice Araújo (dona Valdice) e Edilene Lima (Leninha), por terem sido pessoas justas. E aos colegas e amigos durante o estágio no Arquivo Central-UFS, em especial, Bartolomeu (Bartô), Dona Ivone, Dona Zenilde, Nelson Nascimento e Wellington Oliveira.

Agradeço também, aos colegas e amigos da Sociedade de Estudos Astronômicos de Sergipe (SEASE), em especial à Shyenne Pinheiro, Dinorah Barbosa F. Teixeira, Ívina Mittaraquis, Hellen Chaves, Thaynara Santos, Ângelo Santana, Emerson Amaral, Vinicius Grilo, Liliane Martins, Dra. Elza Ferreira e Tayssa Barreto, alguns, por terem sido grandes amigos(as), por serem pessoas justas, legais e por me ajudarem nos momentos que mais precisei.

Quero agradecer ainda, à grande parte dos professores que fizeram parte da minha vida acadêmica até aqui, uns cumpriram suas obrigações com excelência e alguns outros foram além, foram extraordinários, em especial às(aos) Profs(as). M^a. Aparecida (Cida), Me. Alessandra Santana, Ana Paula, Ricardo Aragão, Alba, Edilma, Sheilla Batista, Eleomar Marques, Aline Santos, Dr. João Paulo Attie, Dr. Osmar de Souza, Dr. Roberto Saito, Dr. Sérgio Scarano, Dra. Ana Cristina Veiga, Dr. Allyson de Oliveira, Dr. Wilberclay, Dr. Mário Everaldo, Dr. Milan Lalic e ao meu orientador de monografia, o Prof. Dr. Rodrigo Lira.

Por fim, gostaria de agradecer meus pais e irmãos, Gilvanete Vieira da Silva, José de Argolo Lima, Jailsson Lima e Jalson Lima, respectivamente, pelos os apoios e ensinamentos passados e por terem dado todo o suporte financeiro, quando necessários. E todos, além destes, que ajudaram financeiramente em algum momento da minha vida acadêmica, em especial minha avó Bernadete Argôlo; meus(minhas) tios(as): José Beto Viera (Zé Beto), Euzébio Vieira (Zeba), Antônio Argôlo (Toim), Josinete Vieira e Josélia Vieira. E a toda minha família,

colegas e amigos dos ensinos fundamental, médio e superior (UFS), além, de amigos da infância, em especial: Armando Lima (Armandinho), Júnior Lima, Juliano Lima, Alexsandro Barros (O Boy), Jeferson Liobino (Jefinho), Laerton Costa, Ezenas Teixeira, Ramon Marques, Cleidiane Fontes, Napoleão Segundo, Thainá Aragão, Jéssica Souza e Ana Carla. Também aos primos: Walison Santos (Passinho), Marcelo Argôlo, Sérgio Lima, Ricardo Viera, Jaelson Vieira, Lucas Batista, Felipe Batista. Não deixando de agradecer ainda aos meus colegas de residência: Me. Jaédson Barros, Joéliton Barros, entre outros que mesmo não citados aqui, pela inviabilidade, foram igualmente importantes.

“Mais importante que a vontade de vencer, é a coragem de começar.” (-Roger Stankewski)

O sentido verdadeiro da vida, depende apenas da escolha de duas palavras "ator" e "autor". Quando você escolhe ser "ator", viverá em um mundo no qual alguém já o criou. E quando você escolhe ser "autor", descobrirá seu próprio Universo. (-Jaelsson S. Lima)

Referências

- [1] Ross, M., Introduction to Cosmology, 4th Edition, John-Wiley & Sons, 2015.
- [2] Ryden, B., Introduction to Cosmology, 2nd Edition, Addison-Wesley, San Francisco, 2003.
- [3] Mo, H., Bosch, F. V. D. and White, S., Galaxy Formation and Evolution, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Coles, P. and Lucchin, F. Cosmology The Origin and Evolution of Cosmic Structure, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [5] Morison, I., Introduction to Astronomy and Cosmology, University of Manchester, UK, John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [6] Oliveira-Filho, K. S., Saraiva, M. F. O., Astronomia e Astrofísica, 2^a ed., Editora: Livraria da Física, São Paulo, 2004.
- [7] Karttunen, H., Kröger, Poutanen, M. and Donner, K. J., Fundamental Astronomy, 5th Edition, Springer, 2007.
- [8] Buta, R., Galaxies: Classification, IOP Publishing Ltd, 2006.
- [9] Harrison, E. R., Cosmology the Science of the Universe, 2nd edition, Cambridge University Press, 2000.
- [10] Pilipenko, S. V., Paper-and-pencil cosmological calculator, 2013. [arXiv:1303.5961v1](https://arxiv.org/abs/1303.5961v1) [astro-ph.CO]
- [11] Einstein, A., Kosmoehogise Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, [Sitzungsberichte Berl. Akad.](#), p. 142-152, 1917.
- [12] de Sitter, W., On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper., [Monthly Notices of the Royal Astronomical Society](#), Vol. 78, I. 1, p. 3-28, 1917.
- [13] Holanda, R. F. L., Análogos clássicos para cosmologias relativísticas aceleradas: uma abordagem lagrangiana, 2007. [Dissertação \(Mestrado em Astronomia\) - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.](#)
- [14] Busti, V. C., Quantificando as Inhomogeneidade da Matéria com Supernovas e Gamma-Ray Bursts, 2009, [Dissertação \(Mestrado em Astronomia\) - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.](#)
- [15] Friedmann, A., Über die Krümmung des Raumes, [Zeitschrift für Physik A](#), vol. 10, I. 1, p. 377-386, 1922.
- [16] Friedmann, A., Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, [Zeitschrift für Physik A](#), vol. 21, I. 1, p. 326-332, 1924.
- [17] Lemaître, G., Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques, [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles](#), vol. 47, p. 49-59, 1927. English translation: Lemaître, G., A Homogeneous universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-Galactic Nebulae, [Mon. Not. R. Astron. Soc.](#), vol. 91, I. 5, p.483-490, 1931.
- [18] Robertson, H. P. Kinematics and world structure, [Astrophysical Journal](#), vol. 82, p. 284-301, 1935.
- [19] Walker, A. G., On Milne's theory of world-structure, [Proceedings of the London Mathematical Society](#), vol. s2-42, I. 1, p.90-127, 1937.
- [20] Hubble, E., A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, [Proc. Nat. Acad. Sci.](#) vol. 15. n. 3, p. 168-173, 1929.

- [21] Carroll B. W., and Ostlie D. A., *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2nd edition, Pearson Addison-Wesley, San Francisco, CA, 2007.
- [22] Tipler, P. A., Llewellyn, R. A., *Física Moderna*, 5ª ed., Rio de Janeiro, LTC, 2010.
- [23] Schramm, D. N., Big Bang nucleosynthesis: the Standard Model and alternatives, *Physica Scripta*, Vol. T36, p. 22-29, 1991.
- [24] Malaney, R. A., & Mathews, G. J., Probing the early universe: A review of primordial nucleosynthesis beyond the standard big bang, *Physics Reports*, Vol. 229, I.4, p. 145-219, 1993.
- [25] Penzias, A. A., Wilson, R. W., A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s, *The Astrophysical Journal*, v.142, p.419-421, 1965.
- [26] Alpher, R. A., Herman, R., Gamov, G. A., Thermonuclear Reactions in the Expanding Universe, *Physical Review*, vol. 74, p. 1198-1199, 1948.
- [27] Smoot, G. et al., COBE Differential Microwave Radiometers: Instrument design and implementation, *The Astrophysical Journal*, v. 360, p. 685-695, 1990.
- [28] Riees, A. G. et al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *The Astronomical Journal*, vol. 116, n. 3, p. 1009-1038, 1998.
- [29] Perlmutter, S. J. et al., Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe, *Nature*, vol. 391, p. 51-54, 1998.
- [30] Dantas, M. A. et al., Current lookback time-redshift bounds on dark energy, *Phys. Lett. B*, vol. 679, p.423-427, 2009. [arXiv:0901.2327v2 [astro-ph.CO]].
- [31] Lima, J. A. S., Alternative Dark Energy Models: An Overview, *Brazilian Journal of Physics*, vol.34, n. 1A, p. 194-200, 2004.
- [32] Hinshaw, G. et al., First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing Methods and Systematic Error Limits, *ApJS*, vol. 148, n. 1, p. 63-95, 2003. Spergel, D. N. et al., First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters, *ApJS*, vol. 148, n. 1, p. 175-94, 2003.
- [33] Ade, P. A. R. et al., Planck intermediate results. XXIV. Constraints on variation of fundamental constants, *A&A*, vol. 580, n. 22, p.1-25, 2015.
- [34] Mazzali, P. A. et al., K. Röpke, F. K., Benetti, S., Hillebrandt, W., A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae, *Science*, vol. 315, I. 5813, p. 825-828, 2007.
- [35] Lima, J. A. S., Thermodynamics of decaying vacuum cosmologies, *Phys. Rev. D*, vol. 54, p. 2571-2577, 1996.
- [36] Carrol, S. M. et al., Is cosmic speed-up due do new gravitacional physics?, *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 043528(5), 2004.
- [37] Rácz, G., et al., Concordance cosmology without dark energy, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 469, I. 1, p. L1-L5, 2017.
- [38] Weinberg, S., *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [39] Henriques, A.B., *Teoria da Relatividade Geral: Uma Introdução*, 1ª ed., IST Press, 2009.
- [40] Young, H. D., Freedman, R. A., *Física IV – Ótica e Física Moderna*, Sears & Zemansky, 12ª edição, São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- [41] Valkenburg, W., Marra, V., Clarkson, C., Testing the Copernican principle by constraining spatial homogeneity, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 438, n. 1, p. L6-L10, 2013.
- [42] Bolejkoa, K. and Wyithe, S. B., Testing the copernican principle via cosmological observations, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2009, n. 02, p. 020, 2009.
- [43] Souza, R. E., *Introdução à Cosmologia*, Editora da Universidade de São Paulo - EDUSP, São Paulo, 2004.
- [44] Bennett, C. L. et al., Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Final Maps and Resultads, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, n.2, Id.20,(pp54). 2013. Hinshaw, G. et al., Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Comological Parameter Resultads, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, n.2, Id. 19, (pp25). 2013.

- [45] Dunkley, J. et al., Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Likelihoods And Parameters From the Data, *ApJS*, vol. 180, n. 2, p. 306-329, 2009. [arXiv:0803.0586v2](#) [astro-ph]
- [46] Spergel, D. N. et al., Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology, *ApJS*, vol. 170, n.2, p. 377-408, 2007.
- [47] Stoughton, C. et al., Sloan Digital Sky Survey: Early Data Release, *The Astronomical Journal*, vol. 123, n. 1, p.485-548, 2002.
- [48] Salinas, S. R. A., A física do século XX, *Estud. av.*, São Paulo, v. 24, n. 68, p.369-374, 2010.
- [49] Gazzinelli, R., Teoria da Relatividade Especial, 1ª ed., Editora Edgard Blücher, Belo Horizonte - MG, 2004.
- [50] Liddle, A., An Introduction to Modern Cosmology, 2nd edition, John Wiley & Sons, 2003.
- [51] Ciufolini, I., Coccia, E., Gorini, V., Peron, R., Vittorio, N., Gravitation: From the Hubble Length to the Planck Length, IOP Publishing, 2005.
- [52] Weinberg, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, 1972.
- [53] Falcke, H., Hehl, F., The Galactic Black Hole: Lectures on General Relativity and Astrophysics, IOP Publishing, 2003.
- [54] Gimenes, H. S., Análise em conjunta de testes cosmológicos. 2013. 111 f. [Dissertação \(Mestrado em Física da Matéria Condensada; Astrofísica e Cosmologia; Física da Ionosfera\) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.](#)
- [55] Dalarsson, M., Dalarsson, N., Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology: A First Course, 1st Edition, Elsevier Academic Press, 2005.
- [56] Islam, J., An Introduction to Mathematical Cosmology, Cambridge University Press, 2nd edition, 2001.
- [57] Carroll, S. M., The Cosmological Constant, *Living Rev. Relativity*, vol.4, p. 1-56, 2001.
- [58] Schutz, B. F., A First Course in General Relativity, 2nd edition, Cambridge University Press, 2009 (4th printing 2013).
- [59] Ellis, G. F. R., et al., On the trace-free Einstein equations as a viable alternative to general relativity, *Class. Quantum Grav.* vol.28, n.22, p.5007-18 (11pp), 2011.
- [60] Wolschin, G., Lectures on Cosmology: Accelerated Expansion of the Universe, Lect. Notes Phys. 800, Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [61] Narlikar, J. V., Introduction to Cosmology, 2nd edition, Cambridge University Press, 1993.
- [62] Bonometto, S., Modern cosmology, IOP Publishing Ltd, 2002.
- [63] Dantas, M. A. et al., Age constraints on the cosmic equation of state, *Astron. Astrophys.*, vol. 467, p. 421-426, 2007. [[arXiv:astro-ph/0607060v2](#)]
- [64] Capozziello, S. et al., Constraining dark energy models using the lookback time to galaxy clusters and the age of the universe, *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 123501-13, 2004.
- [65] Pires N., Zong-Hong Zhu, and Alcaniz, J. S., Lookback time as a test for brane cosmology, *Phys. Rev. D*, vol. 73, n. 12, p. 123530-7, 2006.
- [66] Helene, O. A. M. e Vanin, V. R., Tratamento estatístico de dados em física experimental, Segunda Edição, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo-SP, 1991.
- [67] Vuolo, J. H., Fundamentos da Teoria de Erros, 2ª edição, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo-SP, 1996 (4ª reimpressão, 2005).
- [68] Simon, J. et al., Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential, *Phys. Rev. D*, vol. 71, 2005.
- [69] Jimenez, R., Synthetic stellar populations: single stellar populations, stellar interior models and primordial protogalaxies, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 349, n.1, p. 240-254, 2004.
- [70] Abraham, R. G. et al., The Gemini Deep Deep Survey. I. Introduction to the Survey, Catalogs, and Composite Spectra, *The Astronomical Journal*, vol. 127, n. 5, p. 2455-2483, 2004.
- [71] Dunlop, J. et al., High-Redshift Milli-Jansky Radio Galaxies, In: [Ekers R., Fanti C., Padrielli L. \(eds\) Extragalactic Radio Sources, International Astronomical Union, vol 175, p. 581-582, Springer, Dordrecht, 1996.](#) Dunlop, J. et al., A 3.5-Gyr-old galaxy at redshift 1.55, *Nature*, vol. 381, p. 581-584, 1996. Nolan, L. A., Dunlop,

- J. S., Jimenez, R., The Sun, stellar-population models and the age estimation of high-redshift galaxies, [Monthly Notices of the Royal Astronomical Society](#), vol. 323, n. 2, p. 385–390, 2001.
- [72] Dickinson, C. et al., High-sensitivity measurements of the cosmic microwave background power spectrum with the extended Very Small Array, [MNRAS](#), Vol. 353, I. 3, p. 732–746, 2004.
- [73] Halverson, N. W. et al., Degree Angular Scale Interferometer First Results: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum, [Apj](#), Vol. 568, p. 38–45, 2002.
- [74] Kuol, C. L. et al., High-Resolution Observations of the Cosmic Microwave Background Power Spectrum with ACBAR, [Apj](#), Vol. 600, p. 32–51, 2002.
- [75] Runyan, M. C. et al., ACBAR: The Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver, [ApjS](#), Vol. 149, p. 265–287, 2003.
- [76] Lee, A. T. et al., MAXIMA: an experiment to measure temperature anisotropy in the cosmic microwave background, [AIP Conference Proceedings](#), Vol. 476, p.224-236, 1999. Lee, A. T. et al., A High Spatial Resolution Analysis of the MAXIMA-1 Cosmic Microwave Background Anisotropy Data, [The Astrophysical Journal Letters](#), Vol. 561, n. 1, p. L1-L5, 2001.
- [77] Hanany, S. et al., MAXIMA-1: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of $10'-5^\circ$, [The Astrophysical Journal Letters](#), 545, n.1, p. L5–L9, 2000.
- [78] Myers, S. T. et al., A Fast Gridded Method for the Estimation of the Power Spectrum of the Cosmic Microwave Background from Interferometer Data with Application to the Cosmic Background Imager, [ApJ](#), 591, p. 575-598, 2003.
- [79] Montroy, T. E., A Measurement of the CMB $\langle EE \rangle$ Spectrum from the 2003 Flight of BOOMERANG, [ApJ](#), vol. 647, p. 813-822, 2006.
- [80] Freedman, W. L. et al., Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant, [The Astrophysical Journal](#), vol. 553, n. 1, p. 47-72, 2001.
- [81] Putri, A. N. I. and Wulandari, H. R. T., Constraining cosmological parameter with SN Ia, [J. Phys. Conf. Ser.](#), vol. 771, n.1, p. 1-4 ,2016.
- [82] Astier, P. et al., The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_m , Ω_Λ and ω from the first year data set, [A&A](#), vol. 447, n. 1, p. 31–48, 2006.